

Bab 4

GRADIEN, DIVERGENSI DAN CURL

OPERATOR DIFERENSIAL VEKTOR DEL, dituliskan ∇ , didefinisikan oleh

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Operator vektor ini memiliki sifat-sifat yang analog dengan vektor-vektor biasa. Adalah bermanfaat untuk mendefinisikan tiga buah besaran berikut yang muncul dalam pemakaian praktis yang dikenal sebagai *gradien*, *divergensi* dan *curl*. Operator ∇ juga dikenal sebagai *nabla*.

GRADIEN. Misalkan $\phi(x, y, z)$ terdefiniskan dan diferensiabel pada tiap-tiap titik: (x, y, z) dalam suatu daerah tertentu dari ruang (yakni ϕ mendefinisikan sebuah medan skalar diferensiabel). *Gradien* ϕ , dituliskan $\nabla\phi$ atau *grad* ϕ , didefinisikan oleh

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k}$$

Perhatikan bahwa $\nabla\phi$ mendefinisikan sebuah medan-vektor.

Komponen dari $\nabla\phi$ dalam arah sebuah vektor-satuan \mathbf{a} diberikan oleh $\Delta\phi \cdot \mathbf{a}$ dan disebut *turunan-arah* dari ϕ pada arah \mathbf{a} . Secara fisis, ini adalah laju perubahan ϕ pada (x, y, z) dalam arah \mathbf{a} .

DIVERGENSI. Misalkan $\mathbf{V}(x, y, z) = V_1 \mathbf{i} + V_2 \mathbf{j} + V_3 \mathbf{k}$ terdefiniskan dan diferensiabel dalam suatu daerah tertentu dari ruang (yakni, \mathbf{V} mendefinisikan sebuah medan vektor). Maka *divergensi* dari \mathbf{V} , dituliskan $\nabla \cdot \mathbf{V}$ atau *div* \mathbf{V} , didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (V_1 \mathbf{i} + V_2 \mathbf{j} + V_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \end{aligned}$$

Perhatikan analoginya dengan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$. Juga perhatikan bahwa $\nabla \cdot \mathbf{V} \neq \mathbf{V} \cdot \nabla$.

CURL. Jika $\mathbf{V}(x, y, z)$ adalah sebuah medan vektor diferensiabel maka *curl* atau *rotasi* dari \mathbf{V} , dituliskan $\text{curl } \mathbf{V}$ atau *rot* \mathbf{V} , didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (V_1 \mathbf{i} + V_2 \mathbf{j} + V_3 \mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\
&= \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dalam penguraian determinan, operator-operator $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ haruslah mendahului

V_1, V_2, V_3 .

RUMUS-RUMUS YANG MENGANDUNG ∇ . Jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah fungsi-fungsi vektor yang diferensiabel, dan ϕ dan ψ fungsi-fungsi skalar dari kedudukan (x, y, z) yang diferensiabel, maka

1. $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$ atau $\text{grad}(\phi + \psi) = \text{grad} \phi + \text{grad} \psi$
2. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$ atau $\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div} \mathbf{A} + \text{div} \mathbf{B}$
3. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$ atau $\text{curl}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{curl} \mathbf{A} + \text{curl} \mathbf{B}$
4. $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A})$
5. $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi (\nabla \times \mathbf{A})$
6. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
7. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B})$
8. $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$
9. $\nabla \cdot (\nabla \phi) \equiv \nabla^2 \phi \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$
 di mana $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ disebut *operator Laplace*
10. $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$. Curl dari gradien ϕ adalah nol.
11. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. Divergensi dari curl \mathbf{A} adalah nol.
12. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

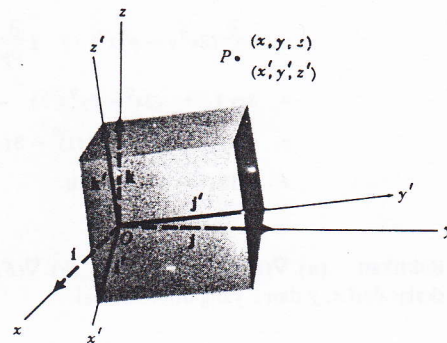
Dalam rumus-rumus 9 – 12, dianggap bahwa ϕ dan \mathbf{A} memiliki turunan-turunan parsial kedua yang kontinu.

INVARIANS. Pandang dua buah sistem koordinat tegak-lurus atau kerangka-kerangka acuan xyz dan $x'y'z'$ (lihat gambar di bawah) yang memiliki titik-asal O yang sama tetapi sumbu-sumbu sistem koordinat yang satu terotasikan (terputarkan) terhadap yang lainnya.

Sebuah titik P dalam ruang memiliki koordinat-koordinat (x, y, z) atau (x', y', z') relatif terhadap sistem-sistem koordinat ini. Persamaan-persamaan transformasi antara koordinat-koordinat atau *transformasi koordinat* diberikan oleh

$$\begin{aligned}
(1) \quad x' &= l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z \\
y' &= l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z \\
z' &= l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z
\end{aligned}$$

di mana $l_{jk}, j, k = 1, 2, 3$ menyatakan arah-arah cosinus dari sumbu-sumbu x', y' dan z' terhadap sumbu-sumbu



bu x , y , dan z (lihat Soal 38). Dalam hal di mana titik-titik asal dari kedua buah sistem koordinat tidaklah berimpitan, maka persamaan transformasinya menjadi

$$(2) \quad \begin{cases} x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z + a'_1 \\ y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z + a'_2 \\ z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z + a'_3 \end{cases}$$

di mana titik-asal O sistem-koordinat xyz berada di (a'_1, a'_2, a'_3) relatif terhadap sistem-koordinat $x'y'z'$.

Persamaan-persamaan transformasi (1) mendefinisikan suatu *rotasi-murni* sedangkan persamaan-persamaan (2) mendefinisikan suatu *rotasi ditambah translasi*. Sebarang benda-kaku memiliki efek translasi yang diikuti dengan rotasi. Transformasi (1) juga disebut *transformasi ortogonal*. Sebuah transformasi koordinat linear disebut suatu *transformasi afin* (*affine transformation*).

Secara fisis, sebuah fungsi skalar atau medan skalar $\phi(x, y, z)$ yang dihitung pada suatu titik tertentu haruslah tak bergantung pada koordinat-koordinat dari titik tersebut. Jadi temperatur pada suatu titik tidaklah bergantung pada apakah koordinat-koordinat (x, y, z) atau (x', y', z') yang dipergunakan. Maka bila $\phi(x, y, z)$ adalah temperatur pada titik P dengan koordinat (x, y, z) sedangkan $\phi'(x', y', z')$ adalah temperatur pada titik P yang sama dengan koordinat-koordinat (x', y', z') , haruslah kita peroleh $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$. Jika $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$, di mana x, y, z dan x', y', z' dihubungkan oleh persamaan-persamaan transformasi (1) atau (2), maka kita menyebut $\phi(x, y, z)$ sebuah *invarian* (*invariant*) terhadap transformasi ini. Misalnya, $x^2 + y^2 + z^2$ invarian di bawah transformasi rotasi (1), karena $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$.

Begitu pula, sebuah fungsi vektor atau medan vektor $\mathbf{A}(x, y, z)$ disebut sebuah *invarian* jika $\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}'(x', y', z')$. Ini akan benar, jika

$$A_1(x, y, z)\mathbf{i} + A_2(x, y, z)\mathbf{j} + A_3(x, y, z)\mathbf{k} = A'_1(x', y', z')\mathbf{i}' + A'_2(x', y', z')\mathbf{j}' + A'_3(x', y', z')\mathbf{k}'$$

Dalam Bab 7 dan 8, ditinjau transformasi-transformasi koordinat yang lebih umum dan konsep-konsep di atas diperluas.

Dapat diperlihatkan (lihat Soal 41) bahwa gradien dari sebuah medan-skalar invarian adalah sebuah medan vektor skalar terhadap transformasi-transformasi (1) atau (2). Begitu pula, divergensi dan curl dari sebuah medan vektor invarian adalah invarian di bawah transformasi ini.

Soal-soal yang Dipecahkan

GRADIEN

1. Jika $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, carilah $\nabla\phi$ (atau $\text{grad}\phi$) pada titik $(1, -2, -1)$.

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(3x^2y - y^3z^2) \\ &= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2) \\ &= 6xy\mathbf{i} + (3x^2 - 3y^3z^2)\mathbf{j} - 2y^3z\mathbf{k} \\ &= 6(1)(-2)\mathbf{i} + \{3(1)^2 - 3(-2)^2(-1)^2\}\mathbf{j} - 2(-2)^3(-1)\mathbf{k} \\ &= -12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 16\mathbf{k} \end{aligned}$$

2. Buktikan (a) $\nabla(F+G) = \nabla F + \nabla G$, (b) $\nabla(FG) = F\nabla G + G\nabla F$ di mana F dan G adalah fungsi-fungsi skalar dari x, y dan z yang diferensiabel.

$$\begin{aligned}
 (a) \nabla(F+G) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (F+G) \\
 &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (F+G) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (F+G) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (F+G) \\
 &= \mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial G}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{j} \frac{\partial G}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial z} + \mathbf{k} \frac{\partial G}{\partial z} \\
 &= \mathbf{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial F}{\partial z} + \mathbf{i} \frac{\partial G}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial G}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial G}{\partial z} \\
 &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) F + \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) G = \nabla F + \nabla G
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \nabla(FG) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (FG) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (FG) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} (FG) \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} (FG) \mathbf{k} \\
 &= \left(F \frac{\partial G}{\partial x} + G \frac{\partial F}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(F \frac{\partial G}{\partial y} + G \frac{\partial F}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(F \frac{\partial G}{\partial z} + G \frac{\partial F}{\partial z} \right) \mathbf{k} \\
 &= F \left(\frac{\partial G}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial G}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial G}{\partial z} \mathbf{k} \right) + G \left(\frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{k} \right) = F \nabla G + G \nabla F
 \end{aligned}$$

3. Carilah $\nabla\phi$ jika (a) $\phi = \ln |\mathbf{r}|$, (b) $\phi = \frac{1}{r}$.

(a) $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Maka $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dan $\phi = \ln |\mathbf{r}| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

$$\begin{aligned}
 \nabla\phi &= \frac{1}{2} \nabla \ln(x^2 + y^2 + z^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 + y^2 + z^2) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \ln(x^2 + y^2 + z^2) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{i} \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} + \mathbf{j} \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} + \mathbf{k} \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \right\} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \nabla\phi &= \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \nabla\{(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\} \\
 &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \\
 &= \mathbf{i} \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x \right\} + \mathbf{j} \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y \right\} + \mathbf{k} \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2z \right\} \\
 &= \frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}
 \end{aligned}$$

4. Perhatikan bahwa $\nabla r^n = n r^{n-2} \mathbf{r}$.

$$\begin{aligned}
 \nabla r^n &= \nabla(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^n = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} \\
 &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}\} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}\} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \{(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}\} \\
 &= \mathbf{i} \left\{ \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2-1} 2x \right\} + \mathbf{j} \left\{ \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2-1} 2y \right\} + \mathbf{k} \left\{ \frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2-1} 2z \right\} \\
 &= n (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2-1} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})
 \end{aligned}$$

$$= n(r^2)^{n/2-1} \mathbf{r} = nr^{n-2} \mathbf{r}$$

Perhatikan bahwa jika $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$ di mana \mathbf{r}_1 sebuah vektor satuan dalam arah \mathbf{r} , maka $\nabla r^n = nr^{n-1} \mathbf{r}_1$.

5. Perhatikan bahwa $\nabla\phi$ adalah sebuah vektor yang tegak-lurus pada permukaan $\phi(x, y, z) = c$ dimana c sebuah konstanta.

Misalkan $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ adalah vektor posisi untuk sebarang titik $P(x, y, z)$ pada permukaan. Maka $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ terletak dalam bidang-singgung terhadap permukaan di atas pada P .

$$\text{Tetapi } d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = 0 \text{ atau } \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = 0$$

yakni $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$ sehingga dengan demikian $\nabla\phi$ tegak-lurus $d\mathbf{r}$ dan dengan demikian terhadap permukaannya.

6. Carilah normal satuan terhadap permukaan $x^2y + 2xz = 4$ pada titik $(2, -2, 3)$.

$$\nabla(x^2y + 2xz) = (2xy + 2z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2x\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \text{ pada titik } (2, -2, 3).$$

$$\text{Maka normal-satuan terhadap permukaan di atas} = \frac{-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (4)^2}} = -\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Normal-satuan yang lain adalah $\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$ yang memiliki arah berlawanan dengan yang di atas.

7. Carilah persamaan untuk bidang singgung terhadap permukaan $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ pada titik $(1, -1, 2)$

$$\nabla(2xz^2 - 3xy - 4x) = (2z^2 - 3y - 4)\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 4xz\mathbf{k}$$

Maka normal terhadap permukaan pada titik $(1, -1, 2)$ adalah $7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$.

Persamaan dari sebuah bidang yang melalui sebuah titik yang vektor kedudukannya \mathbf{r}_0 dan yang mana tegak-lurus normal \mathbf{N} adalah $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N} = 0$ (Lihat Bab 2, Soal 18.). Maka persamaan yang dikehendaki adalah

$$[(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})] \cdot (7\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) = 0$$

$$\text{atau} \quad 7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0.$$

8. Andaikan $\phi(x, y, z)$ dan $\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ adalah temperatur-temperatur pada dua buah titik $P(x, y, z)$ dan $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ dari suatu daerah tertentu, yang berdekatan.

(a) Interpretasikan secara fisis besaran $\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x, y, z)}{\Delta s}$ di mana Δs adalah jarak antara titik-titik P dan Q .

(b) Hitunglah $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}$ dan interpretasikan secara fisis.

(c) Perhatikan bahwa $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$.

(a) Karena $\Delta\phi$ adalah perubahan temperatur antara titik-titik P dan Q dan Δs adalah jarak antara titik-titik ini, $\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ menyatakan laju rata-rata dari perubahan temperatur persatuan jarak dalam arah dari P menuju Q .

(b) Dari kalkulus,

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \text{infinitesimal-infininitesimal berorde lebih tinggi dari } \Delta x, \Delta y, \text{ dan } \Delta z.$$

Maka
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta s}$$

atau
$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

$\frac{d\phi}{ds}$ menyatakan laju perubahan temperatur terhadap jarak di titik P dalam arah menuju Q .

Ini juga disebut *turunan berarah (directional derivative)* dari ϕ

$$\begin{aligned} (c) \frac{d\phi}{ds} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k} \right) \\ &= \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa karena $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ adalah vektor-satuan, $\nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ adalah komponen $\nabla\phi$ dalam arah vektor satuan ini.

9. Perhatikan bahwa laju perubahan terbesar dari ϕ , yakni harga maksimum turunan berarahnya, terjadi pada arah vektor $\nabla\phi$ dan besarnya sama dengan besarnya vektor

Dari Soal 8(c), $\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ adalah proyeksi $\nabla\phi$ pada arah $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Proyeksi ini akan maksimum apabila $\nabla\phi$ dan $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ memiliki arah yang sama. Maka harga maksimum dari $\frac{d\phi}{ds}$ terjadi pada arah $\nabla\phi$ dan besarnya adalah $|\nabla\phi|$.

10. Carilah turunan berarah dari $\phi = x^2yz + 4xz^2$ pada $(1, -2, -1)$ dalam arah $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \nabla(x^2yz + 4xz^2) = (2xyz + 4z^2)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + (x^2y + 8xz)\mathbf{k} \\ &= 8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k} \quad \text{di } (1, -2, -1). \end{aligned}$$

Vektor satuan dalam arah $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ adalah

$$\mathbf{a} = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

Maka turunan berarah yang dikehendaki adalah

$$\nabla\phi \cdot \mathbf{a} = (8\mathbf{i} - \mathbf{j} - 10\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k} \right) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

Karena hasil diatas berharga positif, ini berarti ϕ bertambah dalam arah ini.

11. (a) Dalam arah manakah dari titik $(2, 1, -1)$, turunan berarah dari $\phi = x^2yz^3$ berharga maksimum ?
(b) Berapakah besarnya harga maksimum ini ?

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \nabla(x^2yz^3) = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k} \\ &= -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \quad \text{di } (2, 1, -1). \end{aligned}$$

Maka dari Soal 9,

- (a) turunan berarahnya maksimum dalam arah $\nabla\phi = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$,
 (b) besarnya maksimum ini adalah $|\nabla\phi| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{176} = 4\sqrt{11}$.

12. Carilah sudut antara permukaan-permukaan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dan $z = x^2 + y^2 - 3$ pada titik $(2, -1, 2)$.

Sudut antara permukaan-permukaan pada titik diatas adalah sudut antara normal-normal pada permukaan-permukaan di titik itu.

Normal terhadap $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ di $(2, -1, 2)$ adalah

$$\nabla\phi_1 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Normal terhadap $z = x^2 + y^2 - 3$ atau $x^2 + y^2 - z = 3$ di $(2, -1, 2)$ adalah

$$\nabla\phi_2 = \nabla(x^2 + y^2 - z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - \mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$(\nabla\phi_1) \cdot (\nabla\phi_2) = |\nabla\phi_1| |\nabla\phi_2| \cos \theta$, di mana θ adalah sudut yang diinginkan. Maka

$$(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = |4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}| |4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}| \cos \theta$$

$$16 + 4 - 4 = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (4)^2} \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cos \theta$$

$$\text{dan } \cos \theta = \frac{16}{6\sqrt{21}} = \frac{8\sqrt{21}}{63} = 0.5819; \text{ jadi sudut lancipnya adalah } \theta = \arccos 0.5819 = 54^\circ 25'.$$

13. Misalkan R adalah jarak dari sebuah titik tetap $A(a, b, c)$ ke sebarang titik $P(x, y, z)$. Perhatikan bahwa ∇R adalah vektor satuan dalam arah $\mathbf{AP} = \mathbf{R}$.

Jika \mathbf{r}_A dan \mathbf{r}_P adalah masing-masing vektor-vektor posisi $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ dan $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dari A dan P , maka $\mathbf{R} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A = (x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}$, sehingga $R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$. Maka

$$\nabla R = \nabla(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}) = \frac{(x-a)\mathbf{i} + (y-b)\mathbf{j} + (z-c)\mathbf{k}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

adalah vektor satuan dalam arah \mathbf{R} .

14. Misalkan P sebarang titik pada elips yang titik-titik apinya berada pada titik-titik A dan B , seperti diperlihatkan dalam gambar di bawah. Buktikan bahwa garis-garis AP dan BP membuat sudut-sudut yang sama terhadap garis-singgung pada elips di P .

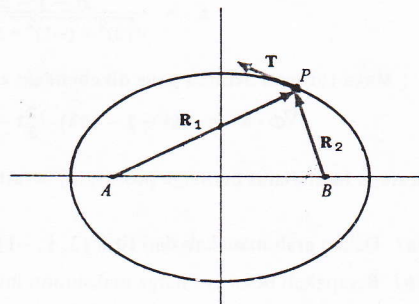
Misalkan $\mathbf{R}_1 = \mathbf{AP}$ dan $\mathbf{R}_2 = \mathbf{BP}$

masing-masing menyatakan vektor-vektor yang digambarkan dari titik-titik A dan B ke titik P pada elips, dan misalkan \mathbf{T} adalah sebuah vektor singgung satuan pada elips di P .

Karena sebuah elips adalah tempat kedudukan dari semua titik P yang jumlah jaraknya ke dua buah titik tetap A dan B adalah sebuah konstanta p , maka terlihat bahwa persamaan untuk elips adalah $R_1 + R_2 = p$.

Menurut Soal 5, $\nabla(R_1 + R_2)$ adalah normal terhadap elips; oleh karena itu $[\nabla(R_1 + R_2)] \cdot \mathbf{T} = 0$ atau $(\nabla R_2) \cdot \mathbf{T} = -(\nabla R_1) \cdot \mathbf{T}$.

Karena ∇R_1 dan ∇R_2 adalah masing-masing vektor-vektor satuan dalam arah \mathbf{R}_1 dan \mathbf{R}_2 (Soal 13), maka cosinus dari sudut antara ∇R_2 dan \mathbf{T} sama dengan cosinus dari sudut antara ∇R_1 dan $-\mathbf{T}$; karena itu sudutnya sendiri adalah sama.



Persoalan ini mempunyai suatu interpretasi fisis. Sinar-sinar cahaya (atau gelombang-gelombang suara) yang berasal dari titik-api A , misalnya, akan dipantulkan dari elips ke titik api B .

DIVERGENSI

15. Jika $\mathbf{A} = x^2z \mathbf{i} - 2y^3z^2 \mathbf{j} + xy^2z \mathbf{k}$, maka carilah $\nabla \cdot \mathbf{A}$ (atau $\text{div } \mathbf{A}$) pada titik $(1, -1, 1)$.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (x^2z \mathbf{i} - 2y^3z^2 \mathbf{j} + xy^2z \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2z) \\ &= 2xz - 6y^2z^2 + xy^2 = 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2 + (1)(-1)^2 = -3 \text{ di } (1, -1, 1).\end{aligned}$$

16. Diketahui $\phi = 2x^3y^2z^4$. (a) Carilah $\nabla \cdot \nabla \phi$ (atau $\text{div grad } \phi$). (b) Perlihatkan bahwa $\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$, dimana $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ menyatakan operator Laplacian.

$$\begin{aligned}(a) \nabla \phi &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2z^4) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}(2x^3y^2z^4) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}(2x^3y^2z^4) \\ &= 6x^2y^2z^4 \mathbf{i} + 4x^3yz^4 \mathbf{j} + 8x^3y^2z^3 \mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Maka } \nabla \cdot \nabla \phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (6x^2y^2z^4 \mathbf{i} + 4x^3yz^4 \mathbf{j} + 8x^3y^2z^3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2z^4) + \frac{\partial}{\partial y}(4x^3yz^4) + \frac{\partial}{\partial z}(8x^3y^2z^3) \\ &= 12xy^2z^4 + 4x^3z^4 + 24x^3y^2z^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \nabla \cdot \nabla \phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \nabla^2 \phi\end{aligned}$$

17. Buktikan bahwa $\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0$.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [-x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}] \\ &= 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{2y^2 - z^2 - x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

Maka dengan menjumlahkan, $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = 0$.

Persamaan $\nabla^2 \phi = 0$ disebut *persamaan Laplace*. Dengan demikian, $\phi = 1/r$ adalah solusi dari persamaan ini.

18. Buktikan : (a) $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
 (b) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A})$.

(a) Misalkan $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k}$.

$$\begin{aligned} \text{Maka } \nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot [(A_1+B_1)\mathbf{i} + (A_2+B_2)\mathbf{j} + (A_3+B_3)\mathbf{k}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (A_1+B_1) + \frac{\partial}{\partial y} (A_2+B_2) + \frac{\partial}{\partial z} (A_3+B_3) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k}) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\phi A_1 \mathbf{i} + \phi A_2 \mathbf{j} + \phi A_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_3) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \phi \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \frac{\partial A_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) + \phi \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \\ &= (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A}) \end{aligned}$$

19. Buktikan $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$.

Misalkan $\phi = r^{-3}$ dan $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ dalam hasil dari Soal 18(b).

$$\begin{aligned} \text{Maka } \nabla \cdot (r^{-3} \mathbf{r}) &= (\nabla r^{-3}) \cdot \mathbf{r} + (r^{-3}) \nabla \cdot \mathbf{r} \\ &= -3r^{-5} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r^{-3} = 0, \quad \text{gunakan Soal 4.} \end{aligned}$$

20. Buktikan $\nabla \cdot (U \nabla V - V \nabla U) = U \nabla^2 V - V \nabla^2 U$.

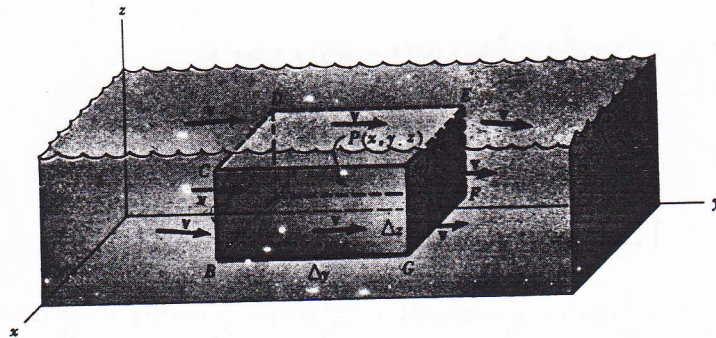
Dari Soal 18(b), dengan $\phi = U$ dan $\mathbf{A} = \nabla V$

$$\nabla \cdot (U \nabla V) = (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U (\nabla \cdot \nabla V) = (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U \nabla^2 V$$

Pertukarkan U dan V menghasilkan $\nabla \cdot (V \nabla U) = (\nabla V) \cdot (\nabla U) + V \nabla^2 U$.

$$\begin{aligned} \text{Kemudian kurangkan, } \nabla \cdot (U \nabla V) - \nabla \cdot (V \nabla U) &= \nabla \cdot (U \nabla V - V \nabla U) \\ &= (\nabla U) \cdot (\nabla V) + U \nabla^2 V - [(\nabla V) \cdot (\nabla U) + V \nabla^2 U] \\ &= U \nabla^2 V - V \nabla^2 U \end{aligned}$$

21. Suatu fluida bergerak sehingga kecepatannya pada sebarang titik adalah $\mathbf{v}(x, y, z)$. Perhatikan bahwa kehilangan fluida (the loss of fluid) per satuan volume per satuan waktu dalam sebuah empat-persegi-panjang kecil yang memiliki pusat di $P(x, y, z)$ dan sisi-sisinya sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat yang besarnya masing-masing $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, secara pendekatan diberikan oleh $\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$.



Dengan melihat pada gambar diatas

komponen x dari kecepatan \mathbf{v} di $P = v_1$

komponen x dari \mathbf{v} pada pusat sisi $AFED = v_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x$ kurang lebih

komponen x dari \mathbf{v} pada pusat sisi $GHCB = v_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x$ kurang lebih

Maka (1) volume fluida yang melewati $AFED$ per satuan waktu $= (v_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x) \Delta y \Delta z$

(2) volume fluida yang melewati $GHCB$ per satuan waktu $= (v_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x) \Delta y \Delta z$.

Kehilangan dalam volume per satuan waktu dalam arah $x = (2) - (1) = \frac{\partial v_1}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$.

Dengan cara yang sama, kehilangan dalam volume per satuan waktu dalam arah $y = \frac{\partial v_2}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$

kehilangan dalam volume per satuan waktu dalam arah $z = \frac{\partial v_3}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$.

Maka, kehilangan total dalam volume per satuan volume per satuan waktu

$$= \frac{(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

Ini secara eksak benar hanya dalam limit empat-persegi-panjangnya menyusut ke titik P , yakni bila $\Delta x, \Delta y$ dan Δz menuju nol. Jika tak ada kehilangan fluida di manapun, maka $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Ini disebut *persamaan kontinuitas (continuity equation)* untuk fluida tak termampatkan (incompressible). Karena fluida tak diciptakan maupun dimusnahkan pada sebarang titik, maka dikatakan bahwa ia tak memiliki sumber (source) dan sungap (sink). Sebuah vektor seperti \mathbf{v} yang divergensinya nol kerap kali disebut *solenoidal*.

22. Tentukan konstanta a sehingga vektor $\mathbf{V} = (x+3y)\mathbf{i} + (y-2z)\mathbf{j} + (x+az)\mathbf{k}$ adalah solenoidal.

Sebuah vektor \mathbf{V} adalah solenoidal jika divergensinya nol (Soal 21).

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az) = 1 + 1 + a$$

Maka $\nabla \cdot \mathbf{V} = a + 2 = 0$ apabila $a = -2$.

CURL

23. Jika $\mathbf{A} = xz^3\mathbf{i} - 2x^2yz\mathbf{j} + 2yz^4\mathbf{k}$, carilah $\nabla \times \mathbf{A}$ (atau curl \mathbf{A}) pada titik $(1, -1, 1)$.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \times (xz^3\mathbf{i} - 2x^2yz\mathbf{j} + 2yz^4\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4) - \frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xz^3) - \frac{\partial}{\partial x}(2yz^4) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^3) \right] \mathbf{k} \\ &= (2z^4 + 2x^2y)\mathbf{i} + 3xz^2\mathbf{j} - 4xyz\mathbf{k} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \text{ di } (1, -1, 1). \end{aligned}$$

24. Jika $\mathbf{A} = x^2y\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}$, carilah curl curl \mathbf{A} .

$$\begin{aligned} \text{curl curl } \mathbf{A} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = \nabla \times [(2x+2z)\mathbf{i} - (x^2+2z)\mathbf{k}] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2z & 0 & -x^2-2z \end{vmatrix} = (2x+2)\mathbf{j} \end{aligned}$$

25. Buktikan : (a) $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
(b) $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi (\nabla \times \mathbf{A})$.

(a) Misalkan $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Maka :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \times [(A_1+B_1)\mathbf{i} + (A_2+B_2)\mathbf{j} + (A_3+B_3)\mathbf{k}] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1+B_1 & A_2+B_2 & A_3+B_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(A_3+B_3) - \frac{\partial}{\partial z}(A_2+B_2) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(A_1+B_1) - \frac{\partial}{\partial x}(A_3+B_3) \right] \mathbf{j} \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(A_2+B_2) - \frac{\partial}{\partial y}(A_1+B_1) \right] \mathbf{k} \\
&= \left[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right] \mathbf{k} \\
&\quad + \left[\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x} \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} \right] \mathbf{k} \\
&= \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}
\end{aligned}$$

$$(b) \nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \times (\phi A_1 \mathbf{i} + \phi A_2 \mathbf{j} + \phi A_3 \mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_3) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1) - \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1) \right] \mathbf{k} \\
&= \left[\phi \frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_3 - \phi \frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_2 \right] \mathbf{i} \\
&\quad + \left[\phi \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_1 - \phi \frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3 \right] \mathbf{j} + \left[\phi \frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_2 - \phi \frac{\partial A_1}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_1 \right] \mathbf{k} \\
&= \phi \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\
&\quad + \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} A_3 - \frac{\partial \phi}{\partial z} A_2 \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} A_1 - \frac{\partial \phi}{\partial x} A_3 \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_2 - \frac{\partial \phi}{\partial y} A_1 \right) \mathbf{k} \right] \\
&= \phi (\nabla \times \mathbf{A}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\
&= \phi (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

26. Hitunglah $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r})$ jika $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Misalkan $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$, $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.

$$\begin{aligned}
\text{Maka } \mathbf{A} \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= (zA_2 - yA_3) \mathbf{i} + (xA_3 - zA_1) \mathbf{j} + (yA_1 - xA_2) \mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dan } \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(zA_2 - yA_3) + \frac{\partial}{\partial y}(xA_3 - zA_1) + \frac{\partial}{\partial z}(yA_1 - xA_2) \\
&= z \frac{\partial A_2}{\partial x} - y \frac{\partial A_3}{\partial x} + x \frac{\partial A_3}{\partial y} - z \frac{\partial A_1}{\partial y} + y \frac{\partial A_1}{\partial z} - x \frac{\partial A_2}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + y \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\
&= [x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}] \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\
&= \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{r} \cdot \text{curl } \mathbf{A}. \text{ Jika } \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ ini menjadi nol.}
\end{aligned}$$

27. Buktikan : (a) $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$ ($\text{curl grad } \phi = \mathbf{0}$), (b) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ ($\text{div curl } \mathbf{A} = 0$).

$$\begin{aligned}
(a) \nabla \times (\nabla \phi) &= \nabla \times \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] \mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] \mathbf{k} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

asalkan kita menganggap bahwa ϕ memiliki turunan-turunan parsial kedua yang kontinu sehingga urutan dari turunannya tidak penting.

$$\begin{aligned}
(b) \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\
&= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0
\end{aligned}$$

dengan menganggap bahwa \mathbf{A} memiliki turunan-turunan parsial kedua yang kontinu.

Perhatikan kesamaan antara hasil-hasil diatas dengan $(\mathbf{C} \times \mathbf{C}m) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C})m = 0$, di mana m sebuah skalar dan $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{C} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = 0$

28. Carilah curl $(\mathbf{r}f(r))$ di mana $f(r)$ diferensiabel.

$$\begin{aligned}
\text{curl } (\mathbf{r}f(r)) &= \nabla \times (\mathbf{r}f(r)) \\
&= \nabla \times (x f(r) \mathbf{i} + y f(r) \mathbf{j} + z f(r) \mathbf{k}) \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x f(r) & y f(r) & z f(r) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z})\mathbf{i} + (x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x})\mathbf{j} + (y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y})\mathbf{k}$$

$$\text{Tetapi } \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \frac{f'(r) \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{f'x}{r}.$$

$$\text{Dengan cara yang sama, } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f'y}{r} \text{ dan } \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f'z}{r}.$$

$$\text{Maka hasilnya} = (z \frac{f'y}{r} - y \frac{f'z}{r})\mathbf{i} + (x \frac{f'z}{r} - z \frac{f'x}{r})\mathbf{j} + (y \frac{f'x}{r} - x \frac{f'y}{r})\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

29. Buktikan $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$.

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} \\ &= \nabla \times \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} & \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} & \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \right] \mathbf{i} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \right] \mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \right] \mathbf{k} \\ &= \left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} \right) \mathbf{j} + \left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{k} \\ &= \left(-\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \right) \mathbf{i} + \left(-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \right) \mathbf{j} + \left(-\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \right) \mathbf{k} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \right) \mathbf{k} \\ &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \\ &\quad + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) \\
&= -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})
\end{aligned}$$

Bila diinginkan, pekerjaan menulis ini dapat dipersingkat begitupula dengan turunan-turunan lainnya dengan hanya menuliskan komponen-komponen \mathbf{i} karena yang lainnya dapat diperoleh berdasarkan simetri.

Hasil di atas dapat juga dibuktikan secara formal sebagai berikut.

Dari Soal 47(a), Bab 2,

$$(1) \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$$

Ambil $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \nabla$ dan $\mathbf{C} = \mathbf{F}$,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

Perhatikan bahwa rumus (1) haruslah ditulis sedemikian sehingga operator-operator \mathbf{A} dan \mathbf{B} mendahului operator \mathbf{C} , bila tidak demikian maka rumus ini tak dapat digunakan.

30. Jika $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, buktikan $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{v}$ dimana $\boldsymbol{\omega}$ adalah sebuah vektor konstan.

$$\begin{aligned}
\text{curl } \mathbf{v} &= \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \nabla \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \nabla \times [(\omega_2 z - \omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\mathbf{k}] \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = 2(\omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}) = 2\boldsymbol{\omega}.
\end{aligned}$$

$$\text{Maka } \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{v}.$$

Soal ini menunjukkan bahwa curl dari sebuah medan vektor mempunyai hubungan dengan sifat-sifat rotasi dari medan. Ini diperkuat dalam Bab 6. Jika medan \mathbf{F} disebabkan karena fluida yang bergerak misalnya, maka sebuah kincir air yang ditempatkan pada berbagai tempat dalam medan akan cenderung untuk berputar dalam daerah dimana $\text{curl } \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, sedangkan dalam daerah dimana $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ maka tak akan terjadi perputaran (rotasi) dan medan \mathbf{F} disebut *irrotasional*. Sebuah medan yang tidak irrotasional seringkali disebut sebuah *medan pual atau vorteks (vortex field)*.

31. Bila $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ perlihatkan bahwa \mathbf{E} dan \mathbf{H} memenuhi $\nabla^2 \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$.

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{Dari Soal 29, } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E}. \text{ Maka } \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

$$\text{Begitupula, } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

$$\text{Tetapi } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) = -\nabla^2 \mathbf{H}. \text{ Maka } \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Persamaan-persamaan yang diberikan di atas berhubungan dengan *persamaan Maxwell dalam teori elektromagnetik*. Persamaan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ disebut *persamaan gelombang*.

SOAL-SOAL SERBA ANEKA

32. (a) Sebuah vektor \mathbf{V} disebut irotasional jika $\text{curl } \mathbf{V} = \mathbf{0}$ (lihat Soal 30). Carilah konstanta-konstanta a, b, c sehingga

$$\mathbf{V} = (x + 2y + az)\mathbf{i} + (bx - 3y - z)\mathbf{j} + (4x + cy + 2z)\mathbf{k}$$

irotasional

- (b) Perlihatkan bahwa \mathbf{V} dapat dinyatakan sebagai gradien dari sebuah fungsi skalar.

$$(a) \text{ curl } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y + az & bx - 3y - z & 4x + cy + 2z \end{vmatrix} = (c+1)\mathbf{i} + (a-4)\mathbf{j} + (b-2)\mathbf{k}$$

Ini sama dengan nol apabila $a = 4$, $b = 2$, $c = -1$ sehingga

$$\mathbf{V} = (x + 2y + 4z)\mathbf{i} + (2x - 3y - z)\mathbf{j} + (4x - y + 2z)\mathbf{k}$$

- (b) Anggaplah $\mathbf{V} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$.

$$\text{Maka (1) } \frac{\partial\phi}{\partial x} = x + 2y + 4z, \quad (2) \frac{\partial\phi}{\partial y} = 2x - 3y - z, \quad (3) \frac{\partial\phi}{\partial z} = 4x - y + 2z.$$

Integrasikan (1) secara sebagian terhadap x , dengan mempertahankan y dan z konstan, maka

$$(4) \quad \phi = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f(y, z)$$

dimana $f(y, z)$ adalah suatu fungsi sebarang dari y dan z . Dengan cara yang sama maka dari (2) dan (3) diperoleh

$$(5) \quad \phi = 2xy - \frac{3y^2}{2} - yz + g(x, z)$$

$$(6) \quad \phi = 4xz - yz + z^2 + h(x, y).$$

Perbandingkan (4), (5) dan (6) maka terlihat bahwa akan terdapat suatu harga ϕ yang sama apabila kita memilih

$$f(y, z) = -\frac{3y^2}{2} + z^2, \quad g(x, z) = \frac{x^2}{2} + z^2, \quad h(x, y) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2}$$

sehingga

$$\phi = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy + 4xz - yz$$

Perhatikan bahwa kita dapat pula menambahkan sebarang konstanta pada ϕ . Pada umumnya jika $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$, maka kita dapat menemukan ϕ sehingga $\mathbf{V} = \nabla\phi$. Sebuah medan vektor yang dapat diturunkan dari sebuah medan skalar ϕ sehingga $\mathbf{V} = \nabla\phi$ disebut sebuah *medan vektor konservatif* dan ϕ disebut *potensial skalar*. Perhatikan bahwa sebaliknya jika $\mathbf{V} = \nabla\phi$, maka $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ (lihat Soal 27a).

33. Perlihatkan bahwa jika $\phi(x, y, z)$ adalah sebarang solusi dari persamaan Laplace, maka $\nabla\phi$ adalah sebuah vektor yang bersifat solenoidal maupun irotasional.

Menurut hipotesis, ϕ memenuhi persamaan Laplace $\nabla^2\phi = 0$, yakni $\nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$. Maka $\nabla\phi$ adalah solenoidal (lihat Soal-soal 21 dan 22).

Dari Soal 27a, $\nabla \times (\nabla\phi) = \mathbf{0}$ sehingga $\nabla\phi$ adalah irotasional.

34. Berikan definisi yang mungkin dari grad \mathbf{B} .

Anggaplah $\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k}$. Secara formal, kita dapat mendefinisikan grad \mathbf{B} sebagai

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{B} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial B_1}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial x} \mathbf{i} \mathbf{k} \\ &\quad + \frac{\partial B_1}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial y} \mathbf{j} \mathbf{k} \\ &\quad + \frac{\partial B_1}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \mathbf{k} \mathbf{k}\end{aligned}$$

Besaran-besaran $\mathbf{i} \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \mathbf{j}$, dan seterusnya disebut *dyad-dyad satuan*. (Perhatikan bahwa $\mathbf{i} \mathbf{j}$ misalnya tidak sama dengan $\mathbf{j} \mathbf{i}$.)

Sebuah besaran yang berbentuk

$$a_{11} \mathbf{i} \mathbf{i} + a_{12} \mathbf{i} \mathbf{j} + a_{13} \mathbf{i} \mathbf{k} + a_{21} \mathbf{j} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j} \mathbf{j} + a_{23} \mathbf{j} \mathbf{k} + a_{31} \mathbf{k} \mathbf{i} + a_{32} \mathbf{k} \mathbf{j} + a_{33} \mathbf{k} \mathbf{k}$$

disebut sebuah dyadik (dyadic) dan koefisien-koefisien a_{11} , a_{12} , ... adalah *komponen-komponennya*. Susunan dari kesembilan komponen ini dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

disebut *matriks* berukuran 3 kali 3. Dyadik adalah perluasan dari vektor. Perluasan yang lebih lanjut menghasilkan *triadik* (*triadic*) yang adalah besaran yang terdiri atas 27 buah suku berbentuk $a_{111} \mathbf{i} \mathbf{i} \mathbf{i} + a_{211} \mathbf{j} \mathbf{i} \mathbf{i} + \dots$. Studi mengenai bagaimana komponen-komponen sebuah dyadic atau triadic bertransformasi dari sistem koordinat yang satu ke yang lainnya memperkenalkan subyek analisis tensor yang dibicarakan dalam Bab 8.

35. Misalkan sebuah vektor \mathbf{A} didefinisikan oleh $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$ dan sebuah dyadik Φ oleh

$$\Phi = a_{11} \mathbf{i} \mathbf{i} + a_{12} \mathbf{i} \mathbf{j} + a_{13} \mathbf{i} \mathbf{k} + a_{21} \mathbf{j} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j} \mathbf{j} + a_{23} \mathbf{j} \mathbf{k} + a_{31} \mathbf{k} \mathbf{i} + a_{32} \mathbf{k} \mathbf{j} + a_{33} \mathbf{k} \mathbf{k}$$

Berikan definisi yang mungkin dari $\mathbf{A} \cdot \Phi$

Secara formal, anggaplah hukum distributif berlaku,

$$\mathbf{A} \cdot \Phi = (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \cdot \Phi = A_1 \mathbf{i} \cdot \Phi + A_2 \mathbf{j} \cdot \Phi + A_3 \mathbf{k} \cdot \Phi$$

Sebagai contoh, pandang $\mathbf{i} \cdot \Phi$. Perkalian ini dibentuk dengan mengambil perkalian-titik dari \mathbf{i} dengan tiap-tiap suku dari Φ dan hasil-hasilnya dijumlahkan. Contoh-contoh yang khas adalah $\mathbf{i} \cdot a_{11} \mathbf{i} \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \cdot a_{12} \mathbf{i} \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \cdot a_{21} \mathbf{j} \mathbf{i}$, $\mathbf{i} \cdot a_{32} \mathbf{k} \mathbf{j}$, dan seterusnya. Bila kita berikan arti terhadap perkalian ini sebagai berikut

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \cdot a_{11} \mathbf{i} \mathbf{i} &= a_{11} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} = a_{11} \mathbf{i} && \text{karena } \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot a_{12} \mathbf{i} \mathbf{j} &= a_{12} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{j} = a_{12} \mathbf{j} && \text{karena } \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \\ \mathbf{i} \cdot a_{21} \mathbf{j} \mathbf{i} &= a_{21} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{i} = 0 && \text{karena } \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 \\ \mathbf{i} \cdot a_{32} \mathbf{k} \mathbf{j} &= a_{32} (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{j} = 0 && \text{karena } \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0\end{aligned}$$

dan berikan pula interpretasi yang analog terhadap suku-suku $\mathbf{j} \cdot \Phi$ dan $\mathbf{k} \cdot \Phi$, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \Phi &= A_1 (a_{11} \mathbf{i} + a_{12} \mathbf{j} + a_{13} \mathbf{k}) + A_2 (a_{21} \mathbf{i} + a_{22} \mathbf{j} + a_{23} \mathbf{k}) + A_3 (a_{31} \mathbf{i} + a_{32} \mathbf{j} + a_{33} \mathbf{k}) \\ &= (A_1 a_{11} + A_2 a_{21} + A_3 a_{31}) \mathbf{i} + (A_1 a_{12} + A_2 a_{22} + A_3 a_{32}) \mathbf{j} + (A_1 a_{13} + A_2 a_{23} + A_3 a_{33}) \mathbf{k}\end{aligned}$$

yang mana adalah sebuah vektor.

36. (a) Interpretasikan simbol $\mathbf{A} \cdot \nabla$. (b) Berikan interpretasi yang mungkin untuk $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$. (c) Apakah mungkin untuk menuliskan ini sebagai $\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$ tanpa menimbulkan tafsir ganda?

(a) Misalkan $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$. Maka, secara formal

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \nabla &= (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

adalah sebuah operator. Misalnya,

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \phi = \left(A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = A_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \phi}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Perhatikan bahwa ini sama dengan $\mathbf{A} \cdot \nabla \phi$.

(b) Secara formal, dengan mempergunakan (a) dimana ϕ diganti oleh $\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} + B_3 \mathbf{k}$,

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \left(A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{B} = A_1 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \\ &= \left(A_1 \frac{\partial B_1}{\partial x} + A_2 \frac{\partial B_1}{\partial y} + A_3 \frac{\partial B_1}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(A_1 \frac{\partial B_2}{\partial x} + A_2 \frac{\partial B_2}{\partial y} + A_3 \frac{\partial B_2}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(A_1 \frac{\partial B_3}{\partial x} + A_2 \frac{\partial B_3}{\partial y} + A_3 \frac{\partial B_3}{\partial z} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

(c) Penggunaan interpretasi dari $\nabla \mathbf{B}$ sebagaimana diberikan dalam Soal 34. Maka, menurut arti simbol yang dikemukakan dalam Soal 35,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B} &= (A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}) \cdot \nabla \mathbf{B} = A_1 \mathbf{i} \cdot \nabla \mathbf{B} + A_2 \mathbf{j} \cdot \nabla \mathbf{B} + A_3 \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{B} \\ &= A_1 \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial x} \mathbf{k} \right) + A_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial y} \mathbf{k} \right) + A_3 \left(\frac{\partial B_1}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial B_2}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial B_3}{\partial z} \mathbf{k} \right)\end{aligned}$$

yang mana memberikan hasil yang sama seperti yang diberikan dalam bagian (b). Darinya diperoleh $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{B}$ tanpa menimbulkan tafsir ganda asalkan konsep dyadik diperkenalkan dengan sifatnya yang sebagaimana telah ditunjukkan.

37. Bila $\mathbf{A} = 2yz \mathbf{i} - x^2 y \mathbf{j} + xz^2 \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = x^2 \mathbf{i} + yz \mathbf{j} - xy \mathbf{k}$ dan $\phi = 2x^2 yz^3$, carilah

(a) $(\mathbf{A} \cdot \nabla) \phi$, (b) $\mathbf{A} \cdot \nabla \phi$, (c) $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$, (d) $(\mathbf{A} \times \nabla) \phi$, (e) $\mathbf{A} \times \nabla \phi$.

$$\begin{aligned}(a) (\mathbf{A} \cdot \nabla) \phi &= [(2yz \mathbf{i} - x^2 y \mathbf{j} + xz^2 \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right)] \phi \\ &= \left(2yz \frac{\partial}{\partial x} - x^2 y \frac{\partial}{\partial y} + xz^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) (2x^2 yz^3) \\ &= 2yz \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 yz^3) - x^2 y \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 yz^3) + xz^2 \frac{\partial}{\partial z} (2x^2 yz^3) \\ &= (2yz)(4xyz^3) - (x^2 y)(2x^2 z^3) + (xz^2)(6x^2 yz^2) \\ &= 8xy^2 z^4 - 2x^4 yz^3 + 6x^3 yz^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \mathbf{A} \cdot \nabla \phi &= (2yz \mathbf{i} - x^2 y \mathbf{j} + xz^2 \mathbf{k}) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \\ &= (2yz \mathbf{i} - x^2 y \mathbf{j} + xz^2 \mathbf{k}) \cdot (4xyz^3 \mathbf{i} + 2x^2 z^3 \mathbf{j} + 6x^2 yz^2 \mathbf{k})\end{aligned}$$

$$= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

Bandungkan dengan (a) menggambarkan hasil $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi = \mathbf{A} \cdot \nabla\phi$.

$$\begin{aligned} (c) (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} &= [(x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - xy\mathbf{k}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})]\mathbf{A} \\ &= (x^2\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} - xy\frac{\partial}{\partial z})\mathbf{A} = x^2\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + yz\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - xy\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \\ &= x^2(-2xy\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) + yz(2z\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}) - xy(2y\mathbf{i} + 2xz\mathbf{k}) \\ &= (2yz^2 - 2xy^2)\mathbf{i} - (2x^3y + x^2yz)\mathbf{j} + (x^2z^2 - 2x^2yz)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Untuk membandingkannya dengan $\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{A}$, lihat Soal 36(c).

$$\begin{aligned} (d) (\mathbf{A} \times \nabla)\phi &= [(2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}) \times (\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})]\phi \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \phi \\ &= [\mathbf{i}(-x^2y\frac{\partial}{\partial z} - xz^2\frac{\partial}{\partial y}) + \mathbf{j}(xz^2\frac{\partial}{\partial x} - 2yz\frac{\partial}{\partial z}) + \mathbf{k}(2yz\frac{\partial}{\partial y} + x^2y\frac{\partial}{\partial x})]\phi \\ &= -(x^2y\frac{\partial \phi}{\partial z} + xz^2\frac{\partial \phi}{\partial y})\mathbf{i} + (xz^2\frac{\partial \phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial \phi}{\partial z})\mathbf{j} + (2yz\frac{\partial \phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial \phi}{\partial x})\mathbf{k} \\ &= -(6x^4y^2z^2 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^3)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (e) \mathbf{A} \times \nabla\phi &= (2yz\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}) \times (\frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2yz & -x^2y & xz^2 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= (-x^2y\frac{\partial \phi}{\partial z} - xz^2\frac{\partial \phi}{\partial y})\mathbf{i} + (xz^2\frac{\partial \phi}{\partial x} - 2yz\frac{\partial \phi}{\partial z})\mathbf{j} + (2yz\frac{\partial \phi}{\partial y} + x^2y\frac{\partial \phi}{\partial x})\mathbf{k} \\ &= -(6x^4y^2z^2 + 2x^3z^5)\mathbf{i} + (4x^2yz^5 - 12x^2y^2z^3)\mathbf{j} + (4x^2yz^4 + 4x^3y^2z^3)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Bandungkan dengan (d) menggambarkan hasil $(\mathbf{A} \times \nabla)\phi = \mathbf{A} \times \nabla\phi$.

INVARIAN

38. Dua buah sistem koordinat xyz dan $x'y'z'$ yang titik-asalnya berimpitan dirotasikan yang satu terhadap yang lain. Turunkan persamaan-persamaan transformasi antara koordinat-koordinat sebuah titik dalam kedua sistem.

Misalkan \mathbf{r} dan \mathbf{r}' vektor-vektor posisi dari sebarang titik P dalam kedua sistem (lihat gambar dalam halaman 59). Karena $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, maka

$$(1) \quad x' \mathbf{i}' + y' \mathbf{j}' + z' \mathbf{k}' = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

Untuk sebarang vektor \mathbf{A} kita peroleh (Soal 20, Bab 2),

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}' + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}'$$

Maka dengan mengambil $\mathbf{A} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ secara berurutan,

$$(2) \quad \begin{cases} \mathbf{i} = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}' + (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}' = l_{11} \mathbf{i}' + l_{21} \mathbf{j}' + l_{31} \mathbf{k}' \\ \mathbf{j} = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}' + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}' = l_{12} \mathbf{i}' + l_{22} \mathbf{j}' + l_{32} \mathbf{k}' \\ \mathbf{k} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}') \mathbf{i}' + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}') \mathbf{j}' + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \mathbf{k}' = l_{13} \mathbf{i}' + l_{23} \mathbf{j}' + l_{33} \mathbf{k}' \end{cases}$$

Substitusikan persamaan-persamaan (2) dalam (1) dan jumlahkan koefisien-koefisien dari $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$, kita peroleh

$$(3) \quad x' = l_{11}x + l_{12}y + l_{13}z, \quad y' = l_{21}x + l_{22}y + l_{23}z, \quad z' = l_{31}x + l_{32}y + l_{33}z$$

yang adalah persamaan-persamaan transformasi yang dikehendaki

$$\begin{aligned} 39. \text{Buktikan } \mathbf{i}' &= l_{11} \mathbf{i} + l_{12} \mathbf{j} + l_{13} \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= l_{21} \mathbf{i} + l_{22} \mathbf{j} + l_{23} \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= l_{31} \mathbf{i} + l_{32} \mathbf{j} + l_{33} \mathbf{k} \end{aligned}$$

Untuk sebarang vektor \mathbf{A} kita peroleh $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}$.

Maka dengan mengambil $\mathbf{A} = \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ secara berurutan,

$$\begin{aligned} \mathbf{i}' &= (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = l_{11} \mathbf{i} + l_{12} \mathbf{j} + l_{13} \mathbf{k} \\ \mathbf{j}' &= (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = l_{21} \mathbf{i} + l_{22} \mathbf{j} + l_{23} \mathbf{k} \\ \mathbf{k}' &= (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}) \mathbf{i} + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j}) \mathbf{j} + (\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} = l_{31} \mathbf{i} + l_{32} \mathbf{j} + l_{33} \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$40. \text{Buktikan bahwa } \sum_{p=1}^3 l_{pm} l_{pn} = 1 \text{ jika } m = n \text{ dan } 0 \text{ jika } m \neq n, \text{ di mana } m \text{ dan } n \text{ dapat mengambil sebarang harga-harga } 1, 2, 3.$$

Dari persamaan-persamaan (2) dari Soal 38,

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 = (l_{11} \mathbf{i}' + l_{21} \mathbf{j}' + l_{31} \mathbf{k}') \cdot (l_{11} \mathbf{i}' + l_{21} \mathbf{j}' + l_{31} \mathbf{k}') \\ &= l_{11}^2 + l_{21}^2 + l_{31}^2 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 = (l_{11} \mathbf{i}' + l_{21} \mathbf{j}' + l_{31} \mathbf{k}') \cdot (l_{12} \mathbf{i}' + l_{22} \mathbf{j}' + l_{32} \mathbf{k}') \\ &= l_{11} l_{12} + l_{21} l_{22} + l_{31} l_{32} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0 = (l_{11} \mathbf{i}' + l_{21} \mathbf{j}' + l_{31} \mathbf{k}') \cdot (l_{13} \mathbf{i}' + l_{23} \mathbf{j}' + l_{33} \mathbf{k}') \\ &= l_{11} l_{13} + l_{21} l_{23} + l_{31} l_{33} \end{aligned}$$

Ini membuktikan hasil yang diinginkan di mana $m = 1$. Dengan meninjau $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{i}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{j}$ dan $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ maka hasilnya dapat dibuktikan untuk $m = 2$ dan $m = 3$.

$$\text{Dengan menuliskan } \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{jika } m = n \\ 0 & \text{jika } m \neq n \end{cases} \text{ maka hasilnya dapat dituliskan sebagai } \sum_{p=1}^3 l_{pm} l_{pn} = \delta_{mn}.$$

Simbol δ_{mn} disebut *simbol Kronecker*.

41. Jika $\phi(x, y, z)$ adalah sebuah skalar yang invarian terhadap rotasi sumbu-sumbu maka buktikan bahwa grad ϕ adalah sebuah vektor yang invarian dibawah transformasi ini.

Menurut hipotesis $\phi(x, y, z) = \phi'(x', y', z')$. Untuk membuktikan hasil yang diinginkan, haruslah kita buktikan bahwa

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \mathbf{i}' + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \mathbf{j}' + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \mathbf{k}'$$

Dengan mempergunakan aturan rantai dan persamaan-persamaan transformasi (3) dari Soal 38, kita peroleh

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{11} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{21} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{31}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{12} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{22} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{32}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'} l_{13} + \frac{\partial \phi'}{\partial y'} l_{23} + \frac{\partial \phi'}{\partial z'} l_{33}$$

Perkalikan masing-masing persamaan ini dengan \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , kemudian jumlahkan dan pergunakan Soal 39, maka diperoleh hasil yang dikehendaki.

Soal-soal Tambahan

42. Jika $\phi = 2xz^4 - x^2y$, carilah $\nabla\phi$ dan $|\nabla\phi|$ pada titik $(2, -2, 1)$. Jawab. $10\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$, $2\sqrt{93}$
43. Jika $\mathbf{A} = 2x^2\mathbf{i} - 3yz\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$ dan $\phi = 2z - x^3y$, carilah $\mathbf{A} \cdot \nabla\phi$ dan $\mathbf{A} \times \nabla\phi$ pada titik $(1, -1, 1)$
Jawab. 5 , $7\mathbf{i} - \mathbf{j} - 11\mathbf{k}$
44. Jika $F = x^2z + e^{y/x}$ dan $G = 2z^2y - xy^2$, carilah (a) $\nabla(F+G)$ dan (b) $\nabla(FG)$ pada titik $(1, 0, -2)$.
Jawab. (a) $-4\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + \mathbf{k}$, (b) $-8\mathbf{j}$
45. Carilah $\nabla|\mathbf{r}|^3$. Jawab. $3r\mathbf{r}$
46. Buktikan $\nabla f(r) = \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r}$.
47. Hitunglah $\nabla(3r^2 - 4\sqrt{r} + \frac{6}{\sqrt{r}})$. Jawab. $(6 - 2r^{-3/2} - 2r^{-7/3})\mathbf{r}$
48. Jika $\nabla U = 2r^4\mathbf{r}$, carilah U . Jawab. $r^6/3 + \text{konstanta}$
49. Carilah $\phi(r)$ sehingga $\nabla\phi = \frac{\mathbf{r}}{r^5}$ dan $\phi(1) = 0$ Jawab. $\phi(r) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{r^3})$
50. Carilah $\nabla\psi$ dimana $\psi = (x^2 + y^2 + z^2)e^{-\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ Jawab. $(2-r)e^{-r}\mathbf{r}$
51. Jika $\nabla\phi = 2xyz^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$, carilah $\phi(x, y, z)$ jika $\phi(1, -2, 2) = 4$. Jawab. $\phi = x^2yz^3 + 20$
52. Jika $\nabla\psi = (y^2 - 2xyz^3)\mathbf{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\mathbf{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\mathbf{k}$, Carilah ψ .
Jawab. $\psi = xy^2 - x^2yz^3 + 3y + (3/2)z^4 + \text{konstanta}$
53. Jika U adalah sebuah fungsi dari x, y, z yang diferensiabel, maka buktikan
 $\nabla U \cdot d\mathbf{r} = dU$.

54. Jika F adalah sebuah fungsi dari x, y, z, t yang diferensiabel, di mana x, y, z adalah fungsi-fungsi diferensiabel dari t , maka buktikan bahwa

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

55. Jika \mathbf{A} sebuah vektor konstan, maka buktikan $\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}$.

56. Jika $\mathbf{A}(x, y, z) = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, maka buktikan bahwa

$$d\mathbf{A} = (\nabla A_1 \cdot d\mathbf{r})\mathbf{i} + (\nabla A_2 \cdot d\mathbf{r})\mathbf{j} + (\nabla A_3 \cdot d\mathbf{r})\mathbf{k}.$$

57. Buktikan $\nabla\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{G\nabla F - F\nabla G}{G^2}$ jika $G \neq 0$.

58. Carilah vektor satuan yang tegak-lurus pada permukaan dari paraboloid putaran $z = x^2 + y^2$ di titik $(1, 2, 5)$.
Jawab. $\frac{2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\pm\sqrt{21}}$

59. Carilah normal satuan yang arahnya keluar pada permukaan $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$ di titik $(3, 1, -4)$.
Jawab. $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k})/3$

60. Carilah persamaan untuk bidang singgung pada permukaan $xz^2 + x^2y = z - 1$ di titik $(1, -3, 2)$.
Jawab. $2x - y - 3z + 1 = 0$

61. Carilah persamaan-persamaan untuk bidang singgung dan garis-normal pada permukaan $z = x^2 + y^2$ di titik $(2, -1, 5)$.

$$\text{Jawab. } 4x - 2y - z = 5, \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{-1} \quad \text{atau } x = 4t+2, \quad y = -2t-1, \quad z = -t+5$$

62. Carilah turunan berarah dari $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ pada $(2, -1, 2)$ dalam arah $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
Jawab. $376/7$.

63. Carilah turunan berarah dari $P = 4e^{2x-y+z}$ pada titik $(1, 1, -1)$ dalam arah menuju $(-3, 5, 6)$.
Jawab. $-20/9$.

64. Dalam arah manakah dari titik $(1, 3, 2)$, turunan berarah dari $\phi = 2xz - y^2$ adalah maksimum? Berapakah besarnya maksimum ini?
Jawab. Dalam arah vektor $4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $2\sqrt{14}$

65. Carilah harga-harga dari konstanta-konstanta a, b, c sehingga turunan berarah dari $\phi = ax^2y + byz + cz^2x^3$ di $(1, 2, -1)$ memiliki suatu maksimum yang besarnya 64 dalam arah sejajar sumbu z .
Jawab. $a=6, b=24, c=-8$

66. Carilah sudut lancip antara permukaan-permukaan $xy^2z = 3x + z^2$ dan $3x^2 - y^2 + 2z = 1$ di titik $(1, -2, 1)$.

$$\text{Jawab. } \arccos \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \arccos \frac{\sqrt{6}}{14} = 79^\circ 55'$$

67. Carilah konstanta-konstanta a dan b sehingga permukaan $ax^2 - byz = (a+2)x$ akan tegak-lurus permukaan $4x^2y + z^3 = 4$ di titik $(1, -1, 2)$.
Jawab. $a = 5/2, b = 1$

68. (a) Misalkan u dan v adalah fungsi-fungsi diferensiabel dari x, y dan z . Perhatikan bahwa syarat perlu dan cukup agar u dan v berhubungan secara fungsional melalui persamaan $F(u, v) = 0$ adalah bahwa $\nabla u \times \nabla v = \mathbf{0}$.

(b) Tentukanlah apakah $u = \arctan x + \arctan y$ dan $v = \frac{x+y}{1-xy}$ berhubungan secara fungsional.

Jawab. (b) Ya ($v = \tan u$)

69. (a) Perlihatkan bahwa syarat perlu dan cukup agar $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ dan $w(x, y, z)$ berhubungan secara fungsional melalui persamaan $F(u, v, w) = 0$ adalah $\nabla u \cdot \nabla v \times \nabla w = 0$.
 (b) Nyatakan $\Delta u \cdot \Delta v \times \Delta w$ dalam bentuk determinan. Determinan ini disebut persamaan Jacob dari u, v, w terhadap x, y, z dan ditulis $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ atau $J\left(\frac{u, v, w}{x, y, z}\right)$.
 (c) Tentukan, apakah $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$ dan $w = xy + yz + zx$ berhubungan secara fungsional.

Jawab. (b)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (c) \text{ Ya, } (u^2 - v - 2w = 0)$$

70. Jika $\mathbf{A} = 3xyz^2 \mathbf{i} + 2xy^3 \mathbf{j} - x^2yz \mathbf{k}$ dan $\phi = 3x^2 - yz$, carilah (a) $\nabla \cdot \mathbf{A}$, (b) $\mathbf{A} \cdot \nabla \phi$, (c) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A})$,
 (d) $\nabla \cdot (\nabla \phi)$, di titik $(1, -1, 1)$. Jawab. (a) 4, (b) -15, (c) 1, (d) 6

71. Hitunglah $(2x^2z \mathbf{i} - xy^2z \mathbf{j} + 3yz^2 \mathbf{k})$. Jawab. $4xz - 2xyz + 6yz$

72. Buktikan $\phi = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$, maka carilah $\nabla^2 \phi$. Jawab. $6z + 24xy - 2z^3 - 6y^2z$

73. Hitunglah $\nabla^2 (\ln r)$. Jawab. $1/r^2$

74. Buktikan $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$ di mana n sebuah konstanta.

75. Jika $\mathbf{F} = (3x^2y - z)\mathbf{i} + (xz^3 + y^4)\mathbf{j} - 2x^3z^2\mathbf{k}$, maka carilah $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$ di titik $(2, -1, 0)$.
 Jawab. $-6\mathbf{i} + 24\mathbf{j} - 32\mathbf{k}$

76. Jika ω adalah sebuah vektor konstan dan $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, maka buktikan bahwa $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

77. Buktikan $\nabla^2(\phi\psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi$.

78. Jika $U = 3x^2y$, $V = xz^2 - 2y$ maka hitunglah $[(\text{grad } U) \cdot (\text{grad } V)]$.

Jawab. $(6yz^2 - 12x)\mathbf{i} + 6xz^2\mathbf{j} + 12xyz\mathbf{k}$

79. Hitunglah $\nabla \cdot (r^3 \mathbf{r})$. Jawab. $6r^3$

80. Hitunglah $\nabla \cdot [r \nabla(1/r^3)]$. Jawab. $3r^{-4}$

81. Hitunglah $\nabla^2 [\nabla \cdot (r/r^2)]$. Jawab. $2r^{-4}$

82. Jika $\mathbf{A} = \mathbf{r}/r$, carilah $\text{grad div } \mathbf{A}$. Jawab. $-2r^{-3} \mathbf{r}$

83. (a) Buktikan $\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr}$. (b) Carilah $f(r)$ di mana $\nabla^2 f(r) = 0$.

Jawab. $f(r) = A + B/r$ di mana A dan B adalah konstanta-konstanta sebarang.

84. Buktikan bahwa vektor $\mathbf{A} = 3y^4z^2 \mathbf{i} + 4x^3z^2 \mathbf{j} - 3x^2y^2 \mathbf{k}$ solenoidal.

85. Perlihatkan bahwa $\mathbf{A} = (2x^2 + 8xy^2z)\mathbf{i} + (3x^3y - 3xy)\mathbf{j} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\mathbf{k}$ tidaklah solenoidal tetapi $\mathbf{B} = xyz^2 \mathbf{A}$ solenoidal.

86. Carilah fungsi diferensiabel $f(r)$ yang paling umum sehingga $f(r) \mathbf{r}$ solenoidal.

Jawab. $f(r) = C/r^3$ di mana C konstanta sebarang.

87. Perhatikan bahwa medan vektor $\mathbf{V} = \frac{-x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ adalah sebuah "medan sungap". Gambarkan dan berikan interpretasi fisisnya.
88. Jika U dan V medan-medan skalar yang diferensiabel, maka buktikan bahwa $\nabla U \times \nabla V$ solenoidal.
89. Jika $\mathbf{A} = 2xz^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 3xz^3\mathbf{k}$ dan $\phi = x^2yz$, carilah
 (a) $\nabla \times \mathbf{A}$, (b) $\text{curl}(\phi\mathbf{A})$, (c) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$, (d) $\nabla[\mathbf{A} \cdot \text{curl} \mathbf{A}]$, (e) $\text{curl grad}(\phi\mathbf{A})$ di titik $(1, 1, 1)$
Jawab. (a) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, (b) $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, (c) $5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, (d) $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, (e) $\mathbf{0}$
90. Jika $F = x^2yz$, $G = xy - 3z^2$, maka carilah (a) $\nabla[(\nabla F) \cdot (\nabla G)]$, (b) $\nabla \cdot [(\nabla F) \times (\nabla G)]$, (c) $\nabla \times [(\nabla F) \times (\nabla G)]$.
Jawab. (a) $(2y^2z + 3x^2z - 12xyz)\mathbf{i} + (4xyz - 6x^2z)\mathbf{j} + (2xy^2 + x^3 - 6x^2y)\mathbf{k}$
 (b) 0
 (c) $(x^2z - 24xyz)\mathbf{i} - (12x^2z + 2xyz)\mathbf{j} + (2xy^2 + 12yz^2 + x^3)\mathbf{k}$
91. Hitunglah $\nabla \times (\mathbf{r}/r^2)$. *Jawab.* 0
92. Untuk harga konstanta a berapakah, vektor $\mathbf{A} = (axy - z^3)\mathbf{i} + (a - 2)x^2\mathbf{j} + (1 - a)xz^2\mathbf{k}$ akan memiliki curl yang sama dengan nol. *Jawab.* $a = 4$.
93. Buktikan $\text{curl}(\phi \text{ grad } \phi) = 0$.
94. Gambarkan diagram medan-medan vektor $\mathbf{A} = xi + yj$ dan $\mathbf{B} = yi - xj$. Hitunglah divergensi dan curl dari tiap-tiap medan vektor dan jelaskan arti fisis dari hasil-hasil yang diperoleh.
95. Jika $\mathbf{A} = x^2z\mathbf{i} + yz^3\mathbf{j} - 3xy\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = y^2\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$ dan $\phi = 2x^2 + yz$, maka carilah
 (a) $\mathbf{A} \cdot (\nabla \phi)$, (b) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi$, (c) $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$, (d) $\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \nabla)$, (e) $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B}$.
Jawab. (a) $4x^3z + yz^4 - 3xy^2$, (b) $4x^3z + yz^4 - 3xy^2$ (sama seperti (a))
 (c) $2y^2z^3\mathbf{i} + (3xy^2 - yz^4)\mathbf{j} + 2x^2z\mathbf{k}$,
 (d) operator $(x^2yz\mathbf{i} - x^2yz^2\mathbf{j} + 2x^3z\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial x} + (y^3z^3\mathbf{i} - y^2z^4\mathbf{j} + 2xyz^3\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial y}$
 $+ (-3xy^3\mathbf{i} + 3xy^2z\mathbf{j} - 6x^2y\mathbf{k})\frac{\partial}{\partial z}$
 (e) $(2xy^2z + y^2z^3)\mathbf{i} - (2xyz^2 + yz^4)\mathbf{j} + (4x^2z + 2xz^3)\mathbf{k}$
96. Jika $\mathbf{A} = yz^2\mathbf{i} - 3xz^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3x\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ dan $\phi = xyz$, maka carilah
 (a) $\mathbf{A} \times (\nabla \phi)$, (b) $(\mathbf{A} \times \nabla)\phi$, (c) $(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B}$, (d) $\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A}$.
Jawab. (a) $-5x^2yz^2\mathbf{i} + xy^2z^2\mathbf{j} + 4xyz^3\mathbf{k}$
 (b) $-5x^2yz^2\mathbf{i} + xy^2z^2\mathbf{j} + 4xyz^3\mathbf{k}$ (sama seperti (a))
 (c) $16z^3\mathbf{i} + (8x^2yz - 12xz^2)\mathbf{j} + 32xz^2\mathbf{k}$ (d) $24x^2z + 4xyz^2$
97. Carilah $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$ dan $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B}$ di titik $(1, -1, 2)$, jika $\mathbf{A} = xz^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 3xz\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 3xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$.
Jawab. $\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 18\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$, $(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} = 4\mathbf{j} + 76\mathbf{k}$
98. Buktikan $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla v^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$.
99. Buktikan $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$.
100. Buktikan $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$.
101. Buktikan $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$.
102. Perhatikan bahwa $\mathbf{A} = (6xy + z^3)\mathbf{i} + (3x^2 - z)\mathbf{j} + (3xz^2 - y)\mathbf{k}$ irrotasional. Carilah ϕ sehingga $\mathbf{A} = \nabla \phi$.
Jawab. $\phi = 3x^2y + xz^3 - yz + \text{konstanta}$.

103. Perhatikan bahwa $\mathbf{E} = \mathbf{r}/r^2$ irrotasional. Carilah ϕ sehingga $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ dan $\phi(a) = 0$ di mana $a > 0$.

Jawab. $\phi = \ln(a/r)$.

104. Jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} irrotasional, maka buktikan bahwa $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ solenoidal.

105. Jika $f(r)$ diferensiabel, buktikan bahwa $f(r)/r$ irrotasional.

106. Apakah terdapat fungsi vektor diferensiabel \mathbf{V} sehingga (a) $\text{curl } \mathbf{V} = \mathbf{r}$, (b) $\text{curl } \mathbf{V} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$? Jika ada, maka carilah \mathbf{V} .

Jawab. (a) Tidak ada. (b) $\mathbf{V} = 3x\mathbf{j} + (2y - x)\mathbf{k} + \nabla\phi$, di mana ϕ adalah fungsi sebarang yang diferensiabel dua kali.

107. Perhatikan bahwa solusi dari persamaan Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

di mana ρ sebuah fungsi dari x, y, z dan c kecepatan cahaya yang dianggap konstan, diberikan oleh

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$$

di mana \mathbf{A} dan ϕ masing-masingnya disebut potensial-potensial vektor dan skalar, yang memenuhi persamaan-persamaan

$$(1) \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2) \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho, \quad (3) \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

108. (a) Diketahui dyadik $\Phi = \mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}$, hitunglah $\mathbf{r} \cdot (\Phi \cdot \mathbf{r})$ dan $(\mathbf{r} \cdot \Phi) \cdot \mathbf{r}$.
 (b) Apakah terdapat dua arti dalam menuliskan $\mathbf{r} \cdot \Phi \cdot \mathbf{r}$?
 (c) Apakah yang dinyatakan oleh $\mathbf{r} \cdot \Phi \cdot \mathbf{r} = 1$ secara geometris?

Jawab. (a) $\mathbf{r} \cdot (\Phi \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \cdot \Phi) \cdot \mathbf{r} = x^2 + y^2 + z^2$,

(b) Tidak.

(c) Permukaan bola dengan pusat pada titik asal.

109. (a) Jika $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 2xz\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$, maka berikan arti yang mungkin untuk $(\mathbf{A} \times \nabla)\mathbf{B}$ di titik $(1, -1, 1)$

(b) Apakah boleh untuk menuliskan hasilnya sebagai $\mathbf{A} \times (\nabla\mathbf{B})$ dengan mempergunakan dyadik.

Jawab. (a) $-4\mathbf{i}\mathbf{i} - \mathbf{i}\mathbf{j} + 3\mathbf{i}\mathbf{k} - \mathbf{j}\mathbf{j} - 4\mathbf{j}\mathbf{i} + 3\mathbf{k}\mathbf{k}$

(b) Ya, apabila operasi dilakukan secara tepat.

110. Buktikan bahwa $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sebuah skalar invarian di bawah rotasi sumbu-sumbu.

111. Jika $\mathbf{A}(x, y, z)$ sebuah medan vektor diferensiabel invarian terhadap rotasi sumbu-sumbu, maka buktikan bahwa (a) $\text{div } \mathbf{A}$ dan (b) $\text{curl } \mathbf{A}$ masing-masingnya adalah medan-medan skalar dan vektor invarian di bawah transformasi.

112. Pecahkan persamaan-persamaan (3) dari Soal-soal yang Dipecahkan no. 38 untuk x, y, z dinyatakan dalam x', y', z' .

Jawab. $x = l_{11}x' + l_{21}y' + l_{31}z'$, $y = l_{12}x' + l_{22}y' + l_{32}z'$, $z = l_{13}x' + l_{23}y' + l_{33}z'$

113. Jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} invarian di bawah rotasi maka perhatikan bahwa $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ dan $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ juga invarian.

114. Perhatikan bahwa di bawah rotasi

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{i}' \frac{\partial}{\partial x'} + \mathbf{j}' \frac{\partial}{\partial y'} + \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial z'} = \nabla'$$

115. Perhatikan bahwa operator persamaan Laplace invarian di bawah rotasi.